模块二 二项式定理

第 1 节 求展开式中某项的系数（★★）

内容提要

用二项式定理求展开式中某项的系数是高考中比较常见的一类题，这类题又可细分为下面的几种情形：

1．求二项展开式中某项的系数：直接写出通项，加以分析即可.

2．求两个二项式乘积的展开式中某项的系数：若其中一项的次数较低，则可用乘法分配律拆开，再分别考虑；若两项次数都较高，例如，让求 $(x+1)^4(x+2)^5$ 的展开式中含 x^3 项的系数，则可写出各自的展开通项 $T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}(r=0,1,2,3,4)$ 和 $P_{k+1}=C_5^k x^{5-k}\cdot 2^k=2^k C_5^k x^{5-k}(k=0,1,\cdots,5)$，并把它们相乘，得到 $T_{r+1}P_{k+1}=2^k C_5^k C_4^r x^{9-r-k}$，这就是整体展开的通项，再分析 r 和 k 如何取值，能使 $9-r-k=3$ 即可，把各种可能的 r，k 的值代入 $T_{r+1}P_{k+1}$，求和即得展开式中的含 x^3 项.

3．求三项展开式中某项的系数：若三项式可变形为二项式，则转化为上面的第 1 种情形处理即可；若不能化为二项式，则类比二项式的展开原理，直接分析如何安排三项中的每一项取几个可得到让求系数的目标项.

典型例题

类型Ⅰ：求二项展开式中某项的系数

【例 1】（2022·上海卷）在 $(x^3+\frac{1}{x})^{12}$ 的展开式中，含 $\frac{1}{x^4}$ 项的系数为_____.

解析：求二项展开式中某一项或某一项的系数，可用通项分析，先把通项写出来，

由题意，$T_{r+1}=C_{12}^r(x^3)^{12-r}(\frac{1}{x})^r=C_{12}^r x^{36-4r}(r=0,1,2,\cdots,12)$，

让求的是含 $\frac{1}{x^4}$ 项的系数，故令通项中 x 的指数部分等于 -4，解出 r，再代回通项，

令 $36-4r=-4$ 可得 $r=10$，所以含 $\frac{1}{x^4}$ 的项为 $T_{11}=C_{12}^{10}x^{-4}=66x^{-4}$，故其系数为 66.

答案：66

【变式】$(2x^2-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为_____.

解析：求二项展开式中某一项或某一项的系数，可用通项分析，先把通项写出来，

由题意，$T_{r+1}=C_6^r(2x^2)^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r\cdot 2^{6-r}C_6^r x^{12-3r}$，其中 $r=0,1,2,\cdots,6$，

让求的是常数项，可令 x 的指数部分为 0 解出 r，再代回通项，

令 $12-3r=0$ 可得 $r=4$，故所求常数项为 $T_5=(-1)^4\cdot 2^2C_6^4=60$.

答案：60

【总结】求二项展开式中的某一项或某一项的系数，可先写出通项，再根据要求的项的特征，对 x 的指数部分赋值，求出 r，反代回通项即可.

类型Ⅱ：求两项乘积的展开式中某项的系数

【例 2】（2022·新高考Ⅰ卷）$(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____.（用数字作答）

解析： $(1-\frac{y}{x})$ 这部分次数低，可用乘法分配律拆开，再分别考虑，

$(1-\frac{y}{x})(x+y)^8=(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$，其中 $(x+y)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r x^{8-r}y^r(r=0,1,2,\cdots,8)$，

接下来应先分别求出 $(x+y)^8$ 和 $\frac{y}{x}(x+y)^8$ 各自的含 x^2y^6 的项，再相减即可，

令 $\begin{cases}8-r=2\\ r=6\end{cases}$ 可得 $r=6$，所以 $(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $T_7=\mathrm{C}_8^6x^2y^6=28x^2y^6$；

对于 $\frac{y}{x}(x+y)^8$，要产生 x^2y^6，应取 $(x+y)^8$ 的展开式中的 x^3y^5，

令 $\begin{cases}8-r=3\\ r=5\end{cases}$ 可得 $r=5$，所以 $\frac{y}{x}(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $\frac{y}{x}T_6=\frac{y}{x}\mathrm{C}_8^5x^3y^5=56x^2y^6$；

故 $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 $28-56=-28$.

答案： -28

【变式】在 $(x+y)^5(1+x)^6$ 的展开式中，含 x^4y^4 项的系数是_____.（用数字作答）

解析： 两项次数都较高，不易像上面例 2 那样拆开分别考虑，可把两部分的通项都写出来再分析，

设 $(x+y)^5$ 展开通项为 $P_{r+1}=\mathrm{C}_5^r x^{5-r}y^r(r=0,1,2,\cdots,5)$，$(1+x)^6$ 展开通项为 $Q_{k+1}=\mathrm{C}_6^k x^k(k=0,1,2,\cdots,6)$，

接下来就是考虑怎样取 r 和 k 的值，可使 $P_{r+1}Q_{k+1}$ 能化为 x^4y^4 这类项，

因为 $P_{r+1}Q_{k+1}=\mathrm{C}_5^r x^{5-r}y^r\cdot\mathrm{C}_6^k x^k=\mathrm{C}_5^r\mathrm{C}_6^k x^{5-r+k}y^r$，所以令 $\begin{cases}5-r+k=4\\ r=4\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}r=4\\ k=3\end{cases}$，

所以 $(x+y)^5(1+x)^6$ 的展开式中，含 x^4y^4 的项为 $P_5Q_4=\mathrm{C}_5^4\mathrm{C}_6^3x^4y^4=100x^4y^4$，其系数为 100.

答案： 100

【总结】求两项相乘的展开式中某项的系数，若其中一项次数低，则可用乘法分配律拆开成几个二项式相加，分别计算目标项的系数后求和即可；若不便于拆开，则写出两项各自的展开通项，并相乘分析.

类型Ⅲ：求三项展开式中某项或某项的系数

【例 3】$(x^2+x^{-2}-2)^3$ 的展开式中的常数项为（　　）

（A）20　（B）-20　（C）-12　（D）-8

解析： 虽然给的是三项式，但观察发现 $x^2+x^{-2}-2$ 是完全平方式，故可化为二项式来考虑，

$(x^2+x^{-2}-2)^3=[(x-x^{-1})^2]^3=(x-x^{-1})^6$，其展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}(-x^{-1})^r=(-1)^r\mathrm{C}_6^r x^{6-2r}(r=0,1,2,\cdots,6)$，

令 $6-2r=0$ 可得 $r=3$，所以 $(x^2+x^{-2}-2)^3$ 的展开式中的常数项为 $T_4=(-1)^3\mathrm{C}_6^3=-20$.

答案： B

【变式】$(x^2-\frac{3}{x}+1)^5$的展开式中 x 的系数为_____.（用数字作答）

解析： $x^2-\frac{3}{x}+1$无法变形为完全平方式，上面例 3 的解法不能用了，此时可根据二项展开式的原理，分析相乘的 5 个 $x^2-\frac{3}{x}+1$中 x^2，$-\frac{3}{x}$，1 分别取几个，相乘后能产生 x 这种项，

$(x^2-\frac{3}{x}+1)^5=(x^2-\frac{3}{x}+1)(x^2-\frac{3}{x}+1)(x^2-\frac{3}{x}+1)(x^2-\frac{3}{x}+1)(x^2-\frac{3}{x}+1)$，

要使展开式中 x 的次数为 1，上面的五个$(x^2-\frac{3}{x}+1)$中取 x^2，$-\frac{3}{x}$，1 的个数有下面几种情况：

① x^2 取 1 个，$-\frac{3}{x}$取 1 个，1 取 3 个，这样得到的项为$C_5^1x^2\cdot C_4^1(-\frac{3}{x})\cdot C_3^3\times 1^3=-60x$；

② x^2 取 2 个，$-\frac{3}{x}$取 3 个，这样得到的项为$C_5^2(x^2)^2\cdot C_3^3(-\frac{3}{x})^3=-270x$；

综上所述，$(x^2-\frac{3}{x}+1)^5$的展开式中 x 的系数为$-60+(-270)=-330$.

答案： -330

【总结】 对于三项式$(x+y+z)^n$，若 $x+y+z$ 是某式的完全平方，则可化为二项式来分析；否则，可类比二项式的展开原理，分析 x，y，z 各取几个可以得到目标项，这种是三项式展开问题的通法.

类型Ⅳ：非标准形式的二项式展开

【例 4】已知$(x-1)^7=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_7(x+1)^7$，则 $a_1=$（　　）

（A）192　　（B）448　　（C）-192　　（D）-448

解析： 右侧不是按 x 展开的，而是按 $x+1$ 展开的，可先将其换元，化为我们熟悉的形式再看，

令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，所给等式即为$(t-2)^7=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_7t^7$，

所以问题即为求上述展开式中含 t 的项的系数，可用通项分析，

展开式的通项$T_{r+1}=C_7^rt^{7-r}(-2)^r=(-2)^rC_7^rt^{7-r}(r=0,1,\cdots,7)$，令 $7-r=1$ 可得 $r=6$，

所以展开式中含 t 的项为$T_7=(-2)^6C_7^6t=448t$，即 $a_1=448$.

答案： B

【反思】 请注意，我们熟悉的二项式展开形式是$(ax+b)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$后面乘的不是 x^i，而是像$(x+1)^i$这类结构，则常使用换元法将其化为我们熟悉的二项展开式分析.

强化训练

1.（2020 • 北京卷 • ★）在$(\sqrt{x}-2)^5$的展开式中，x^2 的系数为_____.

2．（2020·新课标III卷·★）$(x^2+\frac{2}{x})^6$的展开式中常数项是_____.（用数字作答）

3．（2020·新课标Ⅰ卷·★★）$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中，x^3y^3的系数为（　　）

（A）5　（B）10　（C）15　（D）20

答案：C

4．（2023·辽宁模拟·★★★）$(1+3x)^6(1-x)^3$的展开式中x^2的系数为_____.

5．（2023·辽宁模拟·★★★）若$(x-\sqrt{x})^2(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2})^n$的展开式中存在常数项，则正整数$n$的一个值可以为

_____.

6．（2023·永州二模·★★）$(x+\frac{1}{x}-2)^5$的展开式中含x^2的项为_____.

7．（2023·浙江模拟·★★★）$(x+\frac{2}{x}-y)^7$的展开式中xy^4的系数为_____.

8．（2023·大庆模拟·★★★）$(x-\frac{2}{x}-1)^5$的展开式中的常数项为（　　）

（A）-81　　（B）-80　　（C）80　　（D）161

9．（2023·宁波十校联考·★★★）已知$(1+x)(1-2x)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_7(x-1)^7$，则$a_2=$______.